



NOVÉ TECHNOLOGIE  
VÝZKUMNÉ CENTRUM  
ZÁPADOČESKÉ  
UNIVERZITY  
V PLZNI

---

*AUTORIZOVANÝ SOFTWARE*

**MatFEM**

***OBECNÝ ŘEŠIČ NA BÁZI METODY KONEČNÝCH PRVKŮ V  
SYSTÉMU MATLAB***

---

Autor: *Ing. Vladimír Lukeš, Ph.D.  
doc. Dr. Ing. Eduard Rohan*

Číslo projektu: *N*

Číslo výsledku: *NTC-SW-17-10*

Odpovědný pracovník: *Ing. Vladimír Lukeš, Ph.D.*

Vedoucí odboru: *doc. Dr. Ing. Eduard Rohan*

Ředitel centra: *doc. Dr. RNDr. Miroslav Holeček*

---

*PLZEŇ, PROSINEC 2010*

**Jazyk výsledku:** CZ

**Hlavní obor:** JD

**Uplatněn:** ANO

**Název výsledku česky:**

*MatFEM - obecný řešič na bázi metody konečných prvků v systému Matlab*

**Název výsledku anglicky:**

*MatFEM – general finite element solver in Matlab language*

**Abstrakt k výsledku česky:**

*Program je založen na metodě konečných prvků a umožňuje provádět numerické simulace chování homogenních a heterogenních materiálů. Program se skládá z několika modulů a je napsán ve výpočetním systému Matlab. Jednotlivé moduly implementují matematické modely pro lineárně elastické materiály, nelineární hyperelastické materiály a lineární i nelineární porézní materiály, kterýchž popisu je použita matematická metoda dvouškálové homogenizace.*

**Abstrakt k výsledku anglicky:**

*The software is based on the finite element method and is used for numerical simulations of various homogeneous and heterogeneous materials. The software is composed of several modules according to the mathematical model implemented in it. There are modules for linear-elastic materials, hyper-elastic materials and also for linear and non-linear porous materials for which the theory of two-scale homogenization is used. All components are written in Matlab language.*

**Klíčová slova česky:**

*metoda konečných prvků, mechanika kontinua, více-škálové modelování*

**Klíčová slova anglicky:**

*finite element method, continuum mechanics, multiscale modelling*

**Vlastník výsledku:** *Západočeská univerzita v Plzni*

**IČ vlastníka výsledku:** *49777513*

**Stát:** *Česká republika*

**Lokalizace:** <http://www.zcu.cz/ntc/vysledky/sw/NTC-17-10.html>

**Licence:** *ANO*

**Licenční poplatek:** *NE*

**Ekonomické parametry:** *Ekonomické přínosy programu spočívají v možnosti provádět snadno a rychle výpočty chování heterogenních materiálů vlastními prostředky a snižuje závislost na komerčních výpočetních systémech.*

**Technické parametry:** *Luděk Hynčík, Západočeská univerzita v Plzni, Nové technologie - Výzkumné centrum v západočeském regionu, Univerzitní 8, 306 14 Plzeň, 377634709, [hyncik@ntc.zcu.cz](mailto:hyncik@ntc.zcu.cz)*

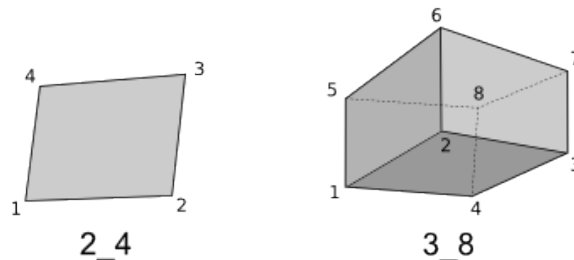
# Dokumentace *MatFEM*

---

## 1 Úvod

Program je založen na metodě konečných prvků [6, 15, 10, 7, 9] a umožňuje provádět numerické simulace chování homogenních a heterogenních materiálů. Program se skládá z několika modulů a je napsán ve výpočetním systému Matlab. Jednotlivé moduly implementují matematické modely pro lineárně elastické materiály, nelineární hyperelastické materiály a lineární i nelineární porézní materiály, k jejichž popisu je použita matematická metoda dvou-škálové homogenizace [8, 11, 13].

Pro řešení problémů metodou konečných prvků ve 2D jsou použity čtyř-uzlové prvky, pro 3D úlohy pak osmi-uzlové konečné prvky. Aproximaci na konečných prvcích lze zvolit pro jednotlivé neznámé buď konstantní, lineární [15] nebo lineární na povrchu a kvadratickou uvnitř elementu [14], v tomto případě se do středu elementu vygeneruje ještě jeden přídatný uzel.



Obrázek 1: 2D a 3D prvek.

Vstupem programu jsou textové soubory *.hfd* a *.mesh*. V souboru *.hfd* je uveden název souboru popisující geometrii, definice materiálu a okrajové podmínky. Soubor *.mesh* obsahuje popis geometrie, souřadnice uzlů a čtyř-uzlové nebo osmi-uzlové prvky. Detailní popis vstupních souborů je uveden v kapitole 2.

Výsledky výpočtů, tj. posuvy, rozložení tlaků, napětí,  $\dots$ , se ukládají do souboru *.vtk* ve formátu VTK [1], který lze prohlížet ve vizualizačních programech jako např. Paraview [2] nebo MayaVi [3].

## 2 Vstupní data

Vstupem jsou textové soubory *.hfd* popisující materiál a okrajové podmínky úlohy a soubor s geometrickými daty *.mesh*.

### 2.1 Soubor s geometrickými daty

Geometrické informace o uzlech a elementech (prvcích) jsou uloženy v textovém souboru s příponou *.mesh* ve formátu *MESH*. Tento formát je popsán v [5] a pro vizualizaci je používán program *Medit* [4]. Uvedený formát je snadno čitelný, což je patrné z následujícího příkladu. `test2d_nosnik.mesh`:

```
MeshVersionFormatted 1
# Mesh converted by HFEM3 tools
```

```
Dimension 2
```

```
Vertices
```

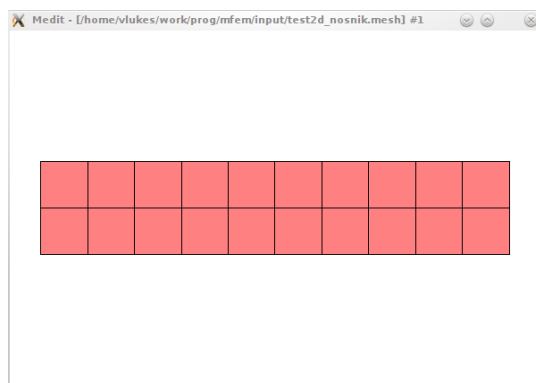
```
33
0.0 0.0 0
0.1 0.0 0
0.2 0.0 0
0.3 0.0 0
0.4 0.0 0
```

```
:
```

```
Quadrilaterals
```

```
20
1 2 13 12 1
2 3 14 13 1
3 4 15 14 1
4 5 16 15 1
```

```
:
```



Obrázek 2: Vizualizace `test2d_nosnik.mesh` v programu *Medit*.

## 2.2 Hlavní vstupní soubor

V textovém souboru s `.hfd` je odkaz na soubor s geometrií a jsou zde definovány materiály a okrajové podmínky úlohy. Struktura souboru je následující:

- *geomfile* – určuje `.mesh` soubor s geometrií
- *material* – na první řádce je uveden počet použitých materiálů, na dalších řádkách jsou jednotlivá čísla materiálů a jejich definice, použitelné materiály jsou:

- *le\_iso*  $\rho$ ,  $E$ ,  $\nu$  – isotropní lineárně elastický materiál s parametry: hustota  $\rho$ , Youngův modul pružnosti  $E$ , Poissonovo číslo  $\nu$
- *neohook*  $\rho$ ,  $\mu$ ,  $\gamma$  – hustota  $\rho$ , smykový modul pružnosti  $\mu$ , objemový modul  $\gamma$
- *extern hfd\_soubor* – externí materiál, parametry dány řešením úlohy definované v souboru *hfd\_soubor*
- *bc\_nd\_displ* – uzlové okrajové podmínky ve tvaru: *číslo uzlu, stupeň volnosti, hodnota*
- *bc\_nd\_force* – uzlové síly ve tvaru: *číslo uzlu, stupeň volnosti, hodnota*
- *bc\_nd\_periodic* – periodické okrajové podmínky ve tvaru: *číslo uzlu 1, stupeň volnosti uzlu 1, číslo uzlu 2, stupeň volnosti uzlu 2*

**Příklad:** `test2d_nosnik.le.mesh`

```
geomfile
test2d_nosnik.mesh

material
1
1 le_iso 1.0 4000 0.3

bc_nd_displ
6
1 0 0.0
1 1 0.0
12 0 0.0
12 1 0.0
23 0 0.0
23 1 0.0

bc_nd_force
1
33 1 -1.0
```

## 3 Základní moduly

### 3.1 Lineární elastostatika – `mfem.le`

Tímto modulem lze řešit statické problémy pro lineární elastické materiály [6, 15, 10]. Materiál je definován parametry: hustota ( $\rho$ ), Youngův modul pružnosti ( $E$ ) a Poissonovo číslo ( $\nu$ ). Úlohu lze řešit pouze vzhledem k neznámým posuvům nebo ve smíšené formulaci vzhledem k posuvům a tlakům. Lze též zvolit, zda počítat úlohu pro rovinnou deformaci nebo rovinnou napjatost, toto je ale nutno provést editací souboru `mfem.le` a změnou proměnné *ss\_flag*.

**Syntaxe:**

```
mfem.le(vstupní_soubor, [aproximace, mixed])
```

- *vstupní soubor* – vstupní *.hfd* soubor
- *aproximace* – řád aproximace posuvů: 0 = konstantní, 1 = lineární, 2 = kvadratická uvnitř elementu
- *mixed* – 1 = smíšená formulace (posuvy a tlaky), 0 = jen posuvy

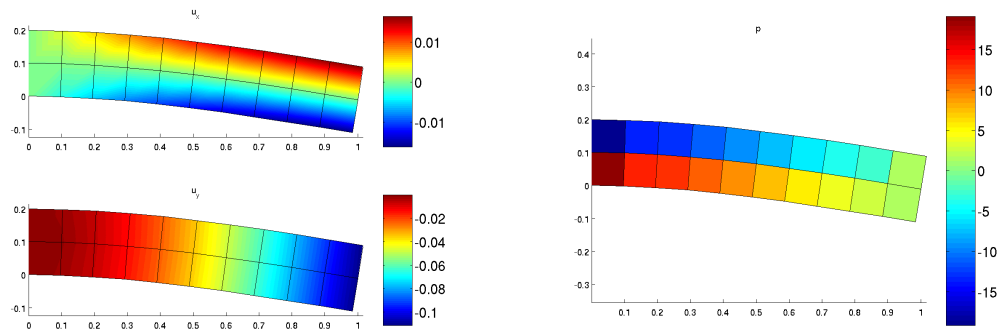
#### Příklad:

- Výpočet posuvů vetknutého nosníku zatíženého silou ve směru  $-y$ , lineární aproximace posuvů

```
>> u~ = mfem_le('input/test2d_nosnik_le.hfd')
```

- Výpočet posuvů vetknutého nosníku zatíženého silou ve směru  $-y$ , smíšená formulace, lineární aproximace posuvů, konstantní aproximace tlaku

```
>> [u, p] = mfem_le('input/test2d_nosnik_le.hfd', 1, 1)
```



Obrázek 3: Výsledné posuvy a tlaky pro vetknutý nosník.

### 3.2 Homogenizace – lineární elastostatika – mfem\_homogle

Modul vypočítá homogenizované materiálové parametry heterogenní struktury definované pomocí reprezentativní periodické jednotky (v kontextu dvou-škálové metody homogenizace tzv. mikroskopická úloha), viz [8, 11, 13]. Pokud se v úloze 3.1 použije materiál typu *extern*, potřebné materiálové parametry se spočítají tímto modulem.

#### Syntaxe:

```
mfem_homogle(vstupní soubor, [aproximace, mixed, rotace])
```

- *vstupní soubor* – vstupní *.hfd* soubor

- *aproximace* – řád aproximace posuvů: 0 = konstantní, 1 = lineární, 2 = kvadratická uvnitř elementu
- *mixed* – 1 = smíšená formulace (posuvy a tlaky), 0 = jen posuvy
- *rotace* – počáteční natočení struktury

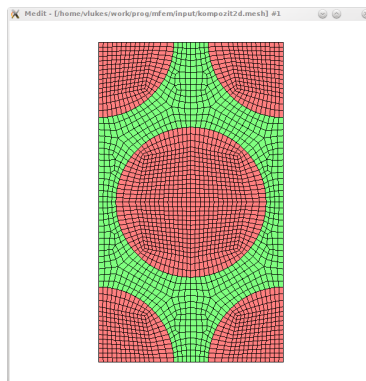
### Příklad:

- Výpočet homogenizovaný materiálových parametrů heterogenní struktury skládající se ze dvou různých materiálů

```
>> hom = mfem_homogle('input/kompozit2d.hfd', 1, 0, 0);
>> hom.Q
```

ans =

```
1.0e+03 *
2.4006    0.7106    0.0000
0.7106    2.4006    0.0000
0.0000    0.0000    0.8452
```



Obrázek 4: Struktura heterogenního materiálu – periodická buňka.

### 3.3 Nelineární hyperelasticita – mfem\_he

Modul řeší statické problémy pro nelineární neo-Hookovský hyperelastický materiál [7, 9, ?]. Materiál je definován parametry: smykový modul pružnosti ( $\mu$ ) a objemový modul ( $\gamma$ ). Úlohu lze opět řešit i ve smíšené formulaci, která je nezbytná pro nestlačitelné materiály. Vzhledem k nelinearitám je nutné úlohu řešit v několika zátěžových krocích a v každém kroku provést iterace k zajištění podmínek rovnováhy.

#### Syntaxe:

```
mfem_he(vstupní_soubor, [aproximace, mixed, Ntime])
```

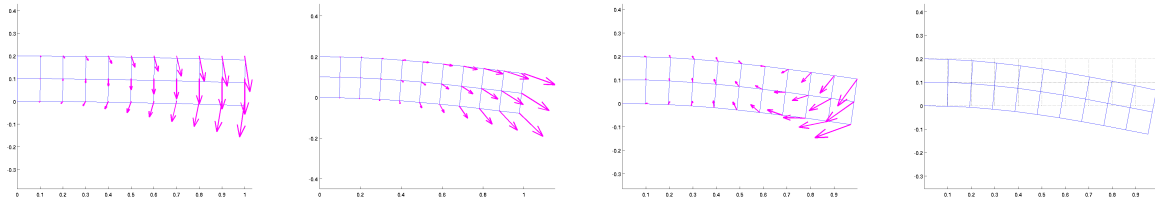


- *vstupní soubor* – vstupní *.hfd* soubor
- *aproximace* – řád aproximace posuvů: 0 = konstantní, 1 = lineární, 2 = kvadratická uvnitř elementu
- *mixed* – 1 = smíšená formulace (posuvy a tlaky), 0 = jen posuvy
- *Ntime* – počet „časových“ (zátěžových) kroků

### Příklad:

- Výpočet posuvů vetknutého nosníku zatíženého silou ve směru  $-y$ , smíšená formulace, lineární aproximace posuvů, konstantní aproximace tlaku, 10 zátěžových kroků

```
>> [u, p] = mfem_he('input/test2d_nosnik_he.hfd', 1, 1, 10)
```



Obrázek 5: Iterační řešení nelineárního problému.

### 3.4 Homogenizace – nelineární hyperelasticita – `mfem_homoghe`

Podobně jako u `mfem_homogle` se zde počítají homogenizované materiálové parametry na jedné reprezentativní buňce heterogenní periodické struktury. Materiálové vlastnosti jsou v tomto případě ovšem závislé na celkové (makroskopické) deformaci, tudíž výpočet musí být ve spojení s `mfem_he` součástí iteračního algoritmu, viz [11].

#### Syntaxe:

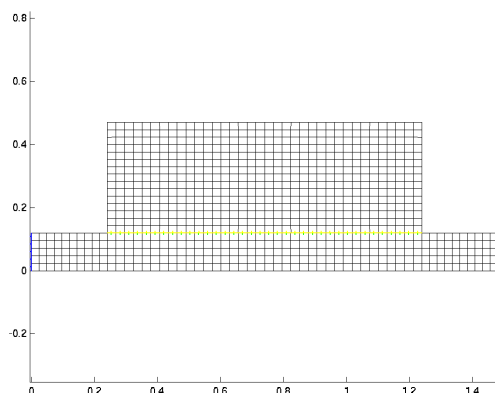
```
mfem_homoghe(fun, [parametr])
```

parametr *fun* určuje, jaká akce má být vykonána:

- `'init'` – inicializace mikrostruktury, načtení vstupních dat  
`mfem_homoghe('init', vstupní hfd soubor)`
- `'stress'`, `'tanstiffness'` – výpočet napětí nebo tečné matice tuhosti [11]  
`mfem_homoghe('stress', F)` – aktualizace mikroskopické konfigurace pomocí deformačního gradientu  $F$  a výpočet napětí  
`mfem_homoghe('tanstiffnes')` – tečné matice tuhosti, bez aktualizace mikroskopické konfigurace

### 3.5 Akustika – mfem\_ac

Modul pro výpočet rozložení akustického tlaku v prostředí s perforovaným rozhraním, [12]. Homogenizované akustické parametry rozhraní jsou počítány modulem `mfem_homogac`. Problém je definován na oblasti (akustické médium) rozdělené perforovanou překážkou a je dán vstup, kde je dána amplituda dopadající vlny, a výstup, kde je předepsána vyzařovací podmínka.



Obrázek 6: Geometrie oblasti: modrá – vstup, červená – výstup, žlutá – perforovaná překážka.

#### Syntaxe:

```
mfem_ac(vstupní_soubor, [ $\omega$ ])
```

- *vstupní\_soubor* – vstupní *.hfd* soubor
- $\omega$  – úhlová frekvence vlnění

#### Příklad:

```
>> p = mfem_actest2('input/tlumic2d_05.hfd')
```

### 3.6 Homogenizace – akustika – mfem\_homogac

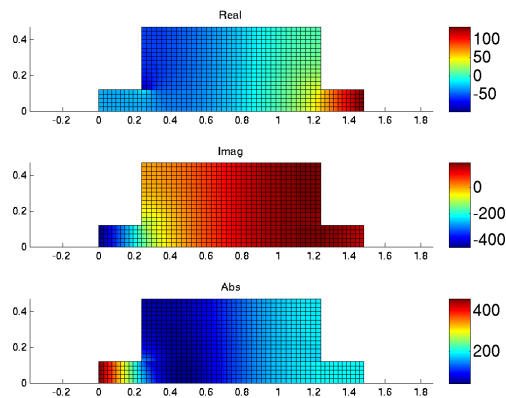
Modul vypočítá homogenizované akustické parametry perforovaného rozhraní s periodickou strukturou [12].

#### Syntaxe:

```
mfem_homogac(vstupní_soubor, [c])
```

- *vstupní\_soubor* – vstupní *.hfd* soubor
- *c* – rychlost zvuku v daném prostředí

#### Příklad:



Obrázek 7: Výpočet akustického tlaku  $p$  (reálná a komplexní složka, velikost).

```
>> hom = mfem_homogac('input/acblok2d_02b.hfd');
>> hom.Q
```

ans =

```
A: 8.1259e+04
B: -0.2509
D: -0.2509
F: -1.3237e-05
```

```
>> hom.Y
```

ans =

```
0.8800
```

- $Q$  – homogenizované akustické parametry
- $Y$  – poměr velikosti celkové oblasti ku oblasti vyplněné akustickým médiem

## 4 Pomocné moduly

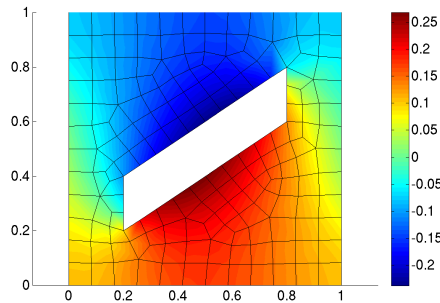
### 4.1 Inicializace

#### 4.1.1 mfem\_init

Načte vstupní data, definuje typ aproximace a vygeneruje mapu stupňů volnosti.

**Syntaxe:**

```
mfem_init(fun, [parametr1, parametr2, ...])
```



Obrázek 8: Struktura perforované překážky – periodická buňka.

kde *fun* je 'gdata', 'approx', 'dof\_map'

- `geom_data = mfem_init('gdata', vstupní_soubor[, řád_aproximace])` – načte vstupní data z *.hfd* souboru, pokud je *řád\_aproximace = 2* vygeneruje se navíc centrální uzel
- `ap = mfem_init('approx', typ_elementů, Gauss_integrace, řád_aproximace)` – definuje se aproximace
- `[dof_map, ndof] = mfem_init('dof_map', počet_uzlů, dim)` – v závislosti na počtu stupňů volnosti v jednom uzlu (*dim*) vygeneruje celkovou mapu stupňů volnosti a vrátí jejich počet

#### 4.1.2 mfem.bcs

Okrajové podmínky úlohy.

**Syntaxe:**

`mfem_bcs(fun, [parametr1, parametr2, ...])`

- `mfem_bcs('init', okr_podmínky_v_hfd, počet_uzlů, okr_stupňů_volnosti)` – inicializuj okrajové podmínky
- `mfem_bcs('reduce_r', matice, okr_podmínky)` – na základě okrajových podmínek zredukuje řádky matice
- `mfem_bcs('reduce_c', matice, okr_podmínky)` – na základě okrajových podmínek zredukuje sloupce matice
- `mfem_bcs('reduce_rc', matice, okr_podmínky)` – na základě okrajových podmínek zredukuje řádky a sloupce matice
- `mfem_bcs('reduce_r_per', matice, okr_podmínky)` – na základě periodických okrajových podmínek zredukuje řádky matice, podobně 'reduce\_c\_per' a 'reduce\_rc\_per'
- `mfem_bcs('find_periodic', uzly, p1, p2)` – nalezne periodické okrajové podmínky
- `mfem_bcs('full', vektor, okr_podmínky_v_hfd)` – na základě okrajových podmínek sestrojí plný vektor neznámých

### 4.1.3 mfem.load

Načte *.hfd* nebo *.mesh* soubor.

#### Syntaxe:

```
mfem_bfun(fun, vstupní soubor)
```

*fun*: 'hfd' nebo 'mesh'

### 4.1.4 mfem.bfun

Vygeneruje bázové funkce pro elementy.

#### Syntaxe:

```
mfem_bfun(typ elementů, Gauss. integrace, řád aproximace)
```

- *typ elementů* – objemové: quad4, britck8, povrchové: quad4\_sf, britck8\_sf
- *Gauss. integrace* – Gaussovy integrační body
- *řád aproximace* – řád aproximace

### 4.1.5 mfem.gaussint

Vygeneruje Gaussovy integrační body.

#### Syntaxe:

```
mfem_gaussint(dim, řád)
```

- *dim* – dimenze úlohy
- *řád* – řád integrace, viz [10]

### 4.1.6 Inicializace – příklad

```
gdata = mfem_init('gdata', filename, approx_order);  
  
gint = mfem_gaussint(gdata.dim, approx_order+1);  
approx = mfem_init('approx', gdata.etype, gint, approx_order);  
dof_map = mfem_init('dof_map', gdata.nnod, gdata.dim);  
  
bcond = mfem_bcs('init', gdata.bc, gdata.nnod, gdata.dim);
```

## 4.2 Sestavení matic

### 4.2.1 mfem.geometry

Výpočet derivací bázových funkcí, determinantů, normál k ploše.

#### Syntaxe:

```
mfem_geometry(fun, [parametr1, parametr2, ...])
```

- `mfem_geometry('vol', elements, uzly, aproximace)` – vypočte objemové derivace bá-  
zových funkcí a determinat Jacobiho matice
- `mfem_geometry('surf', seznam povrchů, uzly, aproximace)` – vypočte povrch a nor-  
málové vektory

#### 4.2.2 `mfem_geom_utils`

Pomocné funkce pro nalezení povrchů, výpočet objemu, ...

**Syntaxe:**

```
mfem_geom_utils(fun, [parametr1, parametr2, ...])
```

```
fun = 'find_interface', 'find_surf', 'select_faces', 'surf_volume', 'surf_integrate',  
'volume', 'id_face', 'id_face2', 'in_region', 'get_surf'
```

#### 4.2.3 `mfem_assemble`

Sestavení matic tuhosti pro objemové integrály.

**Syntaxe:**

```
mfem_assemble(fun, [parametr1, parametr2, ...])
```

#### 4.2.4 `mfem_assemble_surf`

Sestavení matic tuhosti pro povrchové integrály.

**Syntaxe:**

```
mfem_assemble_surf(fun, [parametr1, parametr2, ...])
```

#### 4.2.5 `mfem_fem_utils`

Pomocné funkce pro metodu konečných prvků.

**Syntaxe:**

```
mfem_fem_utils(fun, [parametr1, parametr2, ...])
```

```
fun = 'qp2nd', 'nd2qp', 'val2qp', 'el2qp', 'dof2col', 'jgj', 'Frel', 'remap_nod',  
'remap_dof', 'dof_v2m', 'grad'
```

#### 4.2.6 `mfem_homog_utils`

Pomocné funkce pro metodu homogenizace.

**Syntaxe:**

```
mfem_homog_utils(fun, [parametr1, parametr2, ...])
```

```
fun = 'pis', 'pise', 'avgS'
```

#### 4.2.7 mfem\_nonlinear

Funkce potřebné pro nelineární analýzu.

**Syntaxe:**

`mfem_nonlinear(fun, [parametr1, parametr2, ...])`

- `mfem_nonlinear('dgrad', u, elements, gdata)` – z posuvů  $u$  a derivací v  $gdata$  vypočte deformační gradient
- `mfem_nonlinear('nh_stress', b, invar,  $\mu$ , p)` – z levého Cauchy–Greenova tenzoru, invariantů def. gradientu, smykového modulu  $\mu$  a tlaku  $p$  vypočte napětí pro neo-Hookovský materiál
- `mfem_nonlinear('nh_tmod', b, invar,  $\mu$ , p)` – z levého Cauchy–Greenova tenzoru, invariantů def. gradientu, smykového modulu  $\mu$  a tlaku  $p$  vypočte tečný modul pro neo-Hookovský materiál
- `mfem_nonlinear('nh_press', invar,  $\gamma$ )` – z invariantů def. gradientu a objemového modulu  $\gamma$  vypočte tlakovou část napětí

#### 4.2.8 mfem\_material

Funkce pro přepočítání materiálových parametrů.

**Syntaxe:**

`mfem_material(fun, [parametr1, parametr2, ...])`

## 5 Výpočet a zpracování výsledků

#### 5.0.9 mfem\_solve

Vyřeší systém rovnic, je-li to možné, použije Schurův doplněk.

**Syntaxe:**

`mfem_solve([parametr1, parametr2, ...])`

**Příklad:**

- $u = \text{mfem\_solve}(K, f) - u = \text{inv}(K) \cdot f$
- $[u, p] = \text{mfem\_solve}(K_1, K_2, K_3, f_1, f_2) - \begin{bmatrix} u \\ p \end{bmatrix} = \text{inv} \left( \begin{bmatrix} K_1 & K_2 \\ K_2^T & K_3 \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix}$

#### 5.0.10 mfem\_2output

Uloží řešení výpočtů do souboru.

**Syntaxe:**

`mfem_2output(formát, název_souboru, elements, uzly, [parametr1, parametr2, ...])`

**Příklad:**

- `mfem_2output('vtk', 'vystup.vtk', gdata.el, gdata.nod, , , u, 'posuvy')` – do souboru 'vystup.vtk' uloží ve formátu *VTK* posuvy  $u$  (vektory) a data označí jako „posuvy“, žádná skalární data se neukládají
- `mfem_2output('mesh', 'geometrie.mesh', gdata.el, gdata.nod)` – do souboru 'geometrie.mesh' uloží ve formátu *MESH* pouze geometrii (elementy a uzly)

### 5.0.11 mfem\_draw

Vykreslení výsledků v Matlabu.

#### Syntaxe:

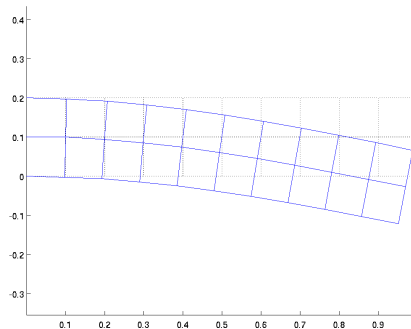
```
mfem_draw(fun, elementy, uzly, mod
```

```
fun = 'elem', 'res', 'res_e', 'point', 'bc', 'sfc'
```

#### Příklad:

- vykreslení nedeformované a deformované sítě

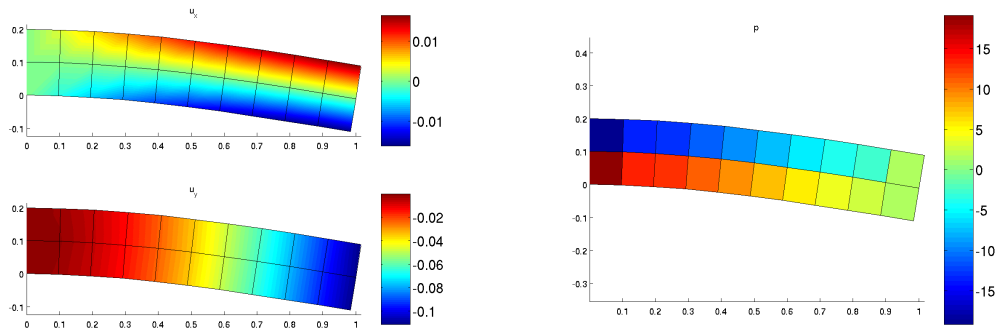
```
mfem_draw('elem', gdata.el, gdata.nod, 'k:');
mfem_draw('elem', gdata.el, gdata.nod+u, 'b');
```



- vykreslení hodnot v uzlech a na elementech

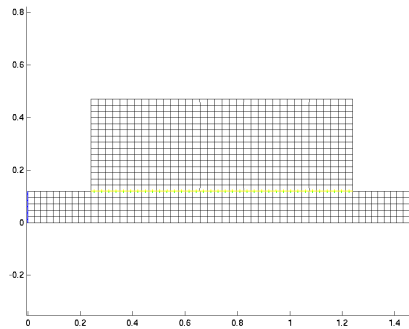
```
mfem_draw('res', gdata.el, gdata.nod+u, u(:,1));
mfem_draw('res', gdata.el, gdata.nod+u, u(:,2));
mfem_draw('res_e', gdata.el, gdata.nod+u, p);
```





- vykreslení sítě a zobrazení povrchu/ploch

```
mfem_draw('elem', gdata.el, gdata.nod, 'k');
mfem_draw('sfc', sfc(sf_in,:), gdata.nod, 'b');
mfem_draw('sfc', sfc(sf_out,:), gdata.nod, 'r');
mfem_draw('sfc', sfc(sf0,:), gdata.nod, 'y');
```



## Reference

- [1] <http://www.vtk.org/>
- [2] <http://www.paraview.org/>
- [3] <http://mayavi.sourceforge.net/>
- [4] <http://www.ann.jussieu.fr/~frey/software.html>
- [5] <http://www.ann.jussieu.fr/~frey/publications/RT-0253.pdf>
- [6] Bathe, K. J. Finite Element Procedures, Prentice Hall, 1996.
- [7] Belytschko, T., Liu, W. L., Moran, B. Nonlinear Finite Elements for Continua and Structures. Wiley, 2000.
- [8] Cioranescu, D., Donato, P. An Introduction to Homogenization, Oxford Lecture Series in Mathematics and its Applications 17, Oxford University Press, Oxford, 1999.

- [9] Crisfield, M. A. Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structures. John Wiley & Sons, Chichester, 1997.
- [10] Hughes, T. J. R. The Finite Element Method – Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis. Prentice-Hall, New Jersey, 1987.
- [11] Rohan, E. Mathematical modelling of soft tissues, habilitation thesis. University of West Bohemia, Plzeň, 2002.
- [12] Rohan, E. and Lukeš, V. Homogenization of the acoustic transmission through perforated layer. Journal of Computational and Applied Mathematics, Volume 234, Issue 6. Elsevier, 2010.
- [13] Sanchez-Palencia, E. Non-Homogeneous Media and Vibration Theory, Lecture Notes in Physics 127, Springer, Berlin, 1980.
- [14] Solin, P. and Segeth, K. Higher-Order Finite Element Methods. Chapman & Hall, 2003.
- [15] Zienkiewicz, O. C. and Taylor, R. L. The Finite Element Method. Butterworth–Heinemann, Oxford, 2000.